Def: <u>Determinante</u>

von $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n; K)$:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

(Leibnizformel 4.2.5)

Satz (Charakterisierung der Determinante) [4.1.2]

Die Determinante ist die einzige Abbildung

$$M(n \times n; K) \longrightarrow K,$$

die

(D1) multilinear ist in den Zeilen,

(D2) alternierend, und

(D3) normiert ist in dem Sinne, dass $\det(E_n) = 1$.

Erinnerung:

Aus (D1) & (D2) folgt:

$$f\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Notiz: $\det({}^tA) = \det(A)$

[4.8.3, D12]

Daher gilt die Charakterisierung ebenso für Spalten wie für Zeilen:

(^{t}D1) det linear in jeder Spalte

(^{t}D2) det $= 0$ falls zwei Spalten gleich.

Für die Berechnung der Determinante heißt das:

(Vert) Beim Vertauschen von Zeilen/Spalten wechselt das Vorzeichen (Notiz zu (D2))

(Add.) Addieren wir zu einer Zeilen/Spalte ein Vielfaches einer anderen Zeile/Spalte, ändert sich die Determinante nicht.

(Sk.-M.) Multiplizieren wir eine Zeile/Spalte mit einem Faktor $\lambda \in K$ ändert sich die Determinante genau um diesen Faktor.

Multiplikationssatz (4.1.3 D11)

Für $A, B \in M(n \times n; K)$ gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Korollar: Invertierbarkeitskriterium

Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

In diesem Fall ist $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

falls $ad-bc \neq 0$

„Hauptdiagonale tauschen & Nebendiagonale negieren."

Korollar:

Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante.

Laplacescher Entwicklungssatz (4.3.2)

Für $A \in M(n \times n; K)$ und $k, l \in \{1, \dots, n\}$ sei $A_{\# k,l} \in M((n-1) \times (n-1); K)$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man die k-te Zeile und die l-te Spalte streicht.

(i) Entwicklung nach der k-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{kl} \cdot \det(A_{\# k,l})$$

(ii) Entwicklung nach der l-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{kl} \cdot \det(A_{\# k,l})$$